6章　検定

6．1　統計的仮説検定の考え
6．1．1　仮説検定とは

新しく開発されたある薬の薬効持続時間が
従来の薬と比べて長くなったかどうかを調べるため，
10人の患者に対して臨床実験を行ったところ，
次のデータを得た．

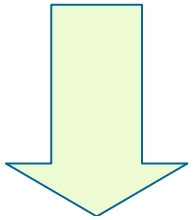
100，107，98，103，111，95，100，105，103，108

従来の薬の薬効時間は，平均100，標準偏差5の正規分布に従うことがわかっている．

新薬に関するデータから，

平均値$\bar{x} = 103$，標準偏差$s = 4.9$

従来の薬と比べて，平均はやや長くなっている。



薬は改良されたと結論づけられるか？

- 本当に差があってそのような結果が得られたのか
- それとも観測誤差の範囲内なのか

客観的な基準にもとづいて効果の有無を判定する必要がある。

「新しく開発された薬の薬効時間は従来のものと同じである」という仮説をたて、その仮説を否定するか否かを確率を用いて判断する。この方法を統計的仮説検定という。

新薬と従来の薬効時間は同じであるという仮説は $\mu = 100$ とおくことができ、これが検定したい仮説となる。

通常、仮説は当事者が疑わしいと思われる内容をおくもので、初めから捨てるつもりでたてる仮説
帰無仮説 H_0 である。

一方，望んでいる仮説 $\mu > 100$ を**対立仮説**と呼び，記号 H_1 で表す．

したがって，この仮説検定では

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \mu = 100 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \mu > 100 \end{cases}$$

の２種類の仮説についての真偽を判定する問題に帰着される．

帰無仮説 H_0 が真であるとき，得られた標本がどの程度の確率で出現するであろうか.

母集団分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に基づく標本平均 $\bar{X}$ の分布は $N(\mu, \sigma^2/n)$ である.

いま，標準偏差に関しては従来のものと新薬で変化がないと仮定すると，新薬に関する母集団分布は $N(100, 5^2)$ となるから，大きさ10に基づく標本平均 $\bar{X}$ の分布は $N(100, 5^2/10)$ となる.

このとき,標本平均$\bar{X}$がデータの平均値103以上となる確率は，Zを標準正規分布に従う確率変数として

$$P(\bar{X} \geq 103) = P\left(\frac{\bar{X} - 100}{5/\sqrt{10}} \geq \frac{103 - 100}{5/\sqrt{10}}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.90)$$

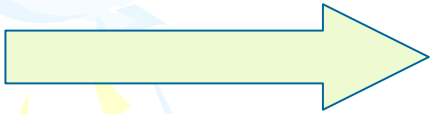
正規分布表によると，

この値は0.0287(=2.87％)となり、

確率は非常に小さいことがわかる.

つまり，帰無仮説 H_0 が真のときに，
同じような実験を100回繰り返したとすると，
平均値が103以上となることが平均約3回
しか起こらないことを意味している．

このことがたった1回の実験で起こった．



めったに起こらないことが起こった．
この場合，帰無仮説 H_0 が正しくてめったに起こらないことがたまたま偶然に起こったと考えるより，帰無仮説 H_0 は正しくなかったと判定し，仮説を否定する．**(仮説を棄却する)**

よって，母集団に関してたてた仮説$\mu = 100$は正しくなかったとみなし，この仮説を棄却して$\mu > 100$であると結論づける．

→ 帰無仮説H_0を棄却、対立仮説H_1を採択．

では，非常に小さい確率で生じたとは考えられないならばどのように判断したらよいか．

この場合，帰無仮説H_0を棄却できないので，結論を保留あるいは帰無仮説をとりあえずは容認しておく．

このことは帰無仮説 H_0 が正しいことを意味するものではない.

したがって，統計的仮説検定の特徴は，帰無仮説が棄却されたときに初めて積極的に何かを主張することができるということになる.

6．1．2　帰無仮説を棄却する基準

統計的仮説検定では得られた標本値が生じる確率の大小によって，帰無仮説を棄却するか否かを判定することがわかった．

では，帰無仮説のもとで生じる確率がどの程度小さいときに帰無仮説 H_0 を棄却すべきか．

基準としては，通例0.05(＝5％) あるいは0.01(＝1％) が用いられており，
これを**有意水準**あるいは**危険率**と呼んでいる．

6.1.3 検定方式の棄却域と検出力

有意水準αに対応する観測値の領域を**棄却域**と呼ぶ.
この棄却域の設定は仮説検定における判定の誤りと密接な関係がある.

	H_0を棄却しない	H_0を棄却する
H_0が真	正しい判定	誤った判定(第１種の誤り)
H_1が真	誤った判定(第２種の誤り)	正しい判定

仮説検定では上記の２種類の誤りをおかす可能性があり，第１種の誤りをおかす確率が有意水準である.
したがって，検定法としてはこの２種類の誤りをおかす確率ができるだけ小さくなるようなものが望ましい.

この２種類の誤りを同時に小さくすることは不可能なので，第１種の誤りの確率の中で，第２種の誤りをおかす確率を小さくする．

１から第２種の誤りをおかす確率を引いた値のことを**検定力**あるいは**検出力**という．

これは，対立仮説 H_1 の方の正当性を検出する確率となり，検定力の大きな検定方式が望ましい．

対立仮説が片側の不等式によって表現され，棄却域が分布の片方の側に設定される検定方式を**片側検定**という．

右片側検定　例えば、母数θがある値θ_0よりも小さくなることはないことを事前に知っているならば，対立仮説は$\theta > \theta_0$となり，棄却域は帰無仮説のもとでの統計量の分布の右側(裾)だけを考えて設定し検定．
左片側検定は同様に考えて、対立仮説$\theta < \theta_0$で検定．

また，母数θについて何の情報もないならば対立仮説は$\theta \neq \theta_0$となり，この場合の棄却域は統計量の分布の両側に設定する**両側検定**という．

6.1.4 p値

帰無仮説を棄却するかしないかを判断する尺度としてp値がある。

p値とは観測値よりまれな値が出現する確率を帰無仮説のもとで計算したもので、p値が有意水準よりも小さければ帰無仮説は棄却され大きければ帰無仮説は棄却されないということになる。

例えば、6.1.1で計算した

$P(\overline{X}103) = 0.0287$が$p$値である。

6．2　母平均の仮説検定
6．2．1　分散既知の場合の平均の検定

母集団に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ を仮定し，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の標本とする．分散の値が既知であることを明確にするため，$\sigma^2 = \sigma_0^2$ とおく．平均 μ に関する検定問題として，μ がある与えられた値 μ_0 より大きいかどうかを判定する問題

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 & : \quad \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説 } H_1 & : \quad \mu > \mu_0 \end{cases}$$

を考える．

標本平均 $\overline{X}$ は帰無仮説 H_0 のもとで $N(\mu, \sigma_0^2/n)$ に従うから、標準化した統計量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことがわかる。

正規分布表から $P(Z \leq 1.64) = 0.05$ であるから

有意水準 5 %の棄却域は $C : Z \leq 1.64$ となる

統計量 Z の実現値（観測値から求めた統計量の値）

$$Z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

が棄却域 C に含まれるならば H_0 を棄却し、含まれなければ H_0 を棄却しないということになる。

同様に,

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 \ : \ \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説}\, H_1 \ : \ \mu < \mu_0 \end{cases}$$

は左片側検定であるから、有意水準５％の棄却域は統計量Zの分布の左側の領域C : $Z < -1.64$で与えられる。また、

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 \ : \ \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説}\, H_1 \ : \ \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

は両側検定であり、有意水準５％の棄却域は統計量Zの分布の両側に設定する。
正規分布表から$P(Z < -1.96, 1.96 < Z) = 0.05$
であることがわかるので
棄却域は$C : Z < -1.96, 1.96 < Z$となる。

一般に、$Z(\alpha)$を標準正規分布の
両側$100 \times \alpha$パーセント点（以下$100\alpha\%$点）
すなわち

$$P(Z \leq -z(\alpha), z(\alpha) \leq Z) = \alpha$$

を満たす値とすると、$z(0.05) = 1.96$である。

6. 2. 2 分散未知の場合の平均の検定

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を正規分布$N(\mu, \sigma^2)$からの大きさnの標本とする．ただし，分散σ^2の値は未知であるとする．

いま，分散σ^2の値は未知であるから，分散既知の場合に用いたZの式は利用できない．そこで，σ^2の代わりに，その推定量である標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

を用いる．

このとき，平均の検定μに用いる統計量は

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$$

を考え，この統計量tは自由度$n-1$のt分布に従う．

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \mu > \mu_0 \end{cases}$$

に対する有意水準5％の棄却域Cは，例えば$n = 10$のとき，t分布の自由度は9となり，
t分布表から$P(t > 1.833) = 0.05$であることがわかるから，$C : t > 1.833$となる．

同様に，検定問題

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

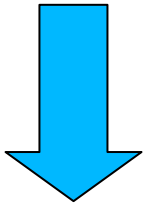
に対する有意水準5％の棄却域は，$n = 10$のとき，

それぞれ$C : t < -1.833$,

$C : t < -2.262,\ 2.262 < t$で与えられる．

6．3　分散の検定

分散とはデータあるいは確率分布の散らばりを表す尺度.



分散の仮説検定は，例えば工場で製造されたある部品の重さに大きなばらつきがあるかどうかを検証する場合などに用いられ，機械に異常があるかどうかを判断する上で，品質管理においても重要な検定といえる.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を正規分布$N(\mu, \sigma^2)$からの大きさnの標本とする．ただし，μ, σ^2はともに未知とする．
いま，母集団の分散σ^2に関する推測に関心がある．

σ^2の推測には，標本分散

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$$

に対して$(n-1)S^2$をσ^2で割った統計量

$$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$$

が用いられる．
この統計量χ^2は自由度$n-1$のカイ２乗分布に従うことが知られている．

分散σ^2の検定問題

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 \ : \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \text{対立仮説}\, H_1 \ : \ \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

を考える．これは右片側検定.

例えば，$n = 20$のとき，
カイ２乗分布の自由度は19であり，
カイ２乗分布表から
$P(\chi^2 > 30.14) = 0.05.$
したがって，$C : \chi^2 > 30.14$となる.

一般に，$\chi^2_\alpha(m)$を自由度mの
カイ２乗分布の上側100α％点

$$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(m)) = \alpha$$

を満たす点とすると，

$$\chi_{0.05}(19) = 30.14$$

と書ける．
カイ２乗分布表は，このように分布の
上側確率を与える点として与えられている．

左片側検定問題

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 \ : \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \text{対立仮説}\, H_1 \ : \ \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

例えば，$n = 20$のときの
有意水準5％の棄却域は，カイ２乗分布表で
確率$0.95\ (= 1 - 0.05)$のところを見て，
$\chi^2_{0.95}(19) = 10.12$より，
C : $(0 <)\ \chi^2 < 10.12.$

一般に, 左片側検定問題に対する有意水準αの棄却域は

$\chi^2_{1-\alpha}(m)$を

$$P(\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m)) = 1 - \alpha$$

を満たす点として,

$$C : (0 <)\ \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(m)$$

で与えられる.

同様に両側検定問題

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 \ : \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \text{対立仮説}\, H_1 \ : \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

に対する有意水準αの棄却域は
両側に裾確率$\alpha/2$をとることにより,

$$C : (0 <)\ \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(m),$$
$$\chi^2_{\alpha/2}(m) < \chi^2$$

で与えられる.

６．４　平均の差の検定
６．４．１対応のある標本の場合

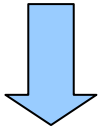
同一個体から得られた２組の標本に対する
平均の差の検定の場合、

例．入浴後の血圧値と安静時の血圧値，
　　レッスン前とレッスン後のボーリングのスコア

１標本の平均の検定と同じように棄却域の設定を
行えばよい．

6．4．2対応のない標本の場合

同じような特性をもつデータであるが，異なった2組の集団から得られた標本に対する平均の差の検定



それぞれの標本が2つの正規母集団から抽出されたとみなし、行う．

2つの母集団分布を $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とし，
$X_1, X_2, \cdots, X_m$ を $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ からの大きさ m の標本，
$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ を $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ からの大きさ n の標本
とする．
それぞれの標本平均，標本分散は $\bar{X}$，S_1^2 および $\bar{Y}$，S_2^2．

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \mu_1 = \mu_2 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

このタイプの検定問題は次の３つの場合が考えられる.

(1) σ_1^2 と σ_2^2 がともに既知の場合
(2) σ_1^2 と σ_2^2 がともに未知であるが，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が仮定できる場合
(3) σ_1^2 と σ_2^2 がともに未知であり，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が仮定できない場合

ここでは(1), (2)の場合について考える.

(1) σ_1^2 と σ_2^2 がともに既知の場合

標本平均 $\bar{X}$ の分布は $N(\mu_1, \sigma_1^2/m)$,
$\bar{Y}$ の分布は $N(\mu_2, \sigma_2^2/n)$, σ_1^2 と σ_2^2 が既知.

$\bar{X}$ と $\bar{Y}$ の差 $\bar{X} - \bar{Y}$ は
正規分布 $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$ に従う.

統計量は $\bar{X} - \bar{Y}$ を標準化した統計量

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$$

.

(2)σ_1^2とσ_2^2がともに未知であるが $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$が仮定できる場合

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$とおく.

分散が未知なので,σ^2の代わりに,

2つの標本分散S_1^2とS_2^2をあわせた統計量

$$S^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

$$= \frac{1}{m+n-2}\left\{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\right\}$$

を用いる.

S^2は分散σ^2の不偏推定量.
このとき，統計量はZの代わりに

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) S^2}}$$

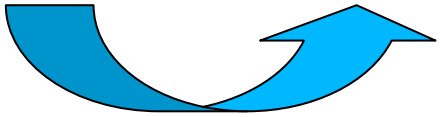
を考える.
この統計量tが自由度$m + n - 2$のt分布に従うことを利用し，１標本の平均の検定と同様に棄却域の設定ができる.

等分散検定

2つの正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ における分散 σ_1^2, σ_2^2 についての検定問題

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

帰無仮説 H_0 が棄却されないとき，とりあえず等分散 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を認めることにする．



2つの正規分布からの，それぞれ大きさmとnの標本に基づく標本分散S_1^2，S_2^2に関して，

$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2$　，$(n-1)S_2^2/\sigma_2^2$
はそれぞれ自由度$m-1$，$n-1$のカイ2乗分布に従い，
帰無仮説H_0のもとで，
$F=S_1^2/S_2^2$は自由度$(m-1,n-1)$のF分布に従う．

F 分布の性質などから，有意水準５％の棄却域は，

$$\begin{cases} S_2^2 > S_1^2 \text{ ならば } C : S_2^2/S_1^2 > F_{m-1}^{n-1}(0.025) \\ S_1^2 > S_2^2 \text{ ならば } C : S_1^2/S_2^2 > F_{n-1}^{m-1}(0.025) \end{cases}$$

となることが示される．

6．5　母比率の検定

母集団において，ある性質をもつ割合（母比率）p についての検定を考える．[比率の検定]

- 工場で作られた製品の不良品率
- テレビ番組の視聴率

また，２つの母集団における比率p_1，p_2の差についての検定を考える.[比率の差の検定]

- A，B2台の機械で作られた製品の不良品率の差異
- あるテレビ番組に対する視聴率の男女間での差異

6．5．1　比率の検定

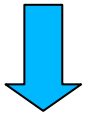
$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はベルヌーイ分布 $B(1,p)$ をもつ母集団からの大きさ n の標本.

$P(X_i = 1) = p,$

$P(X_i = 0) = 1 - p$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする.

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ は２項分布に従う.

n がある程度大きい場合には，中心極限定理より



近似的に正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従う.

例えば,p を製品の不良品率とすれば,

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ は，標本中の不良品の個数を表す.

p_0をある値として，

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 & : \quad p = p_0 \\ \text{対立仮説}\, H_1 & : \quad p > p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 & : \quad p = p_0 \\ \text{対立仮説}\, H_1 & : \quad p < p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 & : \quad p = p_0 \\ \text{対立仮説}\, H_1 & : \quad p \neq p_0 \end{cases}$$

が考えられる．

帰無仮説H_0のもとで，検定統計量は

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

例. ある工場の機械Ａで作られる製品の不良率は1.8％.
この工場に新しい機械Ｂを導入した.
機械Ｂで作られた製品400個を無作為に抽出し不良品の個数を数えたところ10個.
不良率は変化したといえるか, 有意水準5％で検定せよ.

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ p = 0.018 \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ p \neq 0.018 \end{cases}$$

統計量 $Z = (\sum_{i=1}^{n} X_i - np_0)/\sqrt{np_0(1-p_0)}$

$$z_0 = \frac{10 - 400 \times 0.018}{\sqrt{400 \times 0.018 \times 0.982}} = 1.05.$$

$C : Z < -1.96,\ 1.96 < Z.$

$Z_0 = 1.05.$

よって，帰無仮説は有意水準５％で棄却されない．

機械Ｂで作られた製品の不良率pは0.018と異なるとはいえず，変化したとはいえない．

6．5．2比率の差の検定

$X_1, X_2, \cdots, X_m$は$B(1, p_1)$からの大きさmの標本,
$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$は$B(1, p_2)$からの大きさnの標本.

2つの標本比率
$\hat{p}_1 = \sum_{i=1}^{m} X_i/m,$
$\hat{p}_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$
はm, nがある程度大きいとき,
正規分布$N(p_1, p_1(1-p_1)/m)$, $N(p_2, p_2(1-p_2)/n)$
に従う.
標本比率の差$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$の分布は
正規分布$N(p_1-p_2, p_1(1-p_1)/m+p_2(1-p_2)/n)$.

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 & : & p_1 = p_2 \\ \text{対立仮説}\, H_1 & : & p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 & : & p_1 = p_2 \\ \text{対立仮説}\, H_1 & : & p_1 < p_2 \end{cases}$$

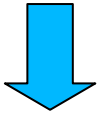
$$\begin{cases} \text{帰無仮説}\, H_0 & : & p_1 = p_2 \\ \text{対立仮説}\, H_1 & : & p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

が考えられる.

帰無仮説 H_0 のもとで，$p_1 = p_2 = p$ とおくと，

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

ここで，pの値は未知．



pの代わりにpの推定値

$$\hat{p} = \frac{m\hat{p}_1 + n\hat{p}_2}{m+n}$$

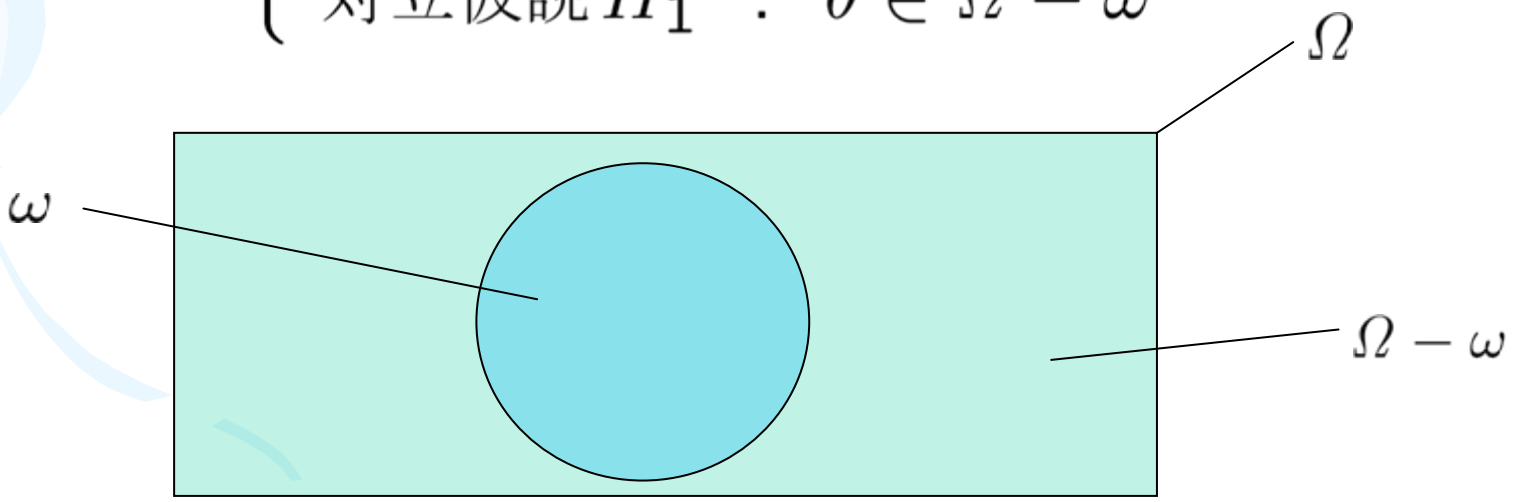
を用いる．

pを$\hat{p}$に置き換えたZの式を用いて，検定を行うことができる．

6．6　一様最強力検定

母集団分布のパラメータθについて，一般に次のような検定問題を考える．

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 \ : \ \theta \in \omega \\ \text{対立仮説 } H_1 \ : \ \theta \in \Omega - \omega \end{cases}$$



Ω:パラメータθのとり得る値の集合

ω:Ωのある部分集合

最強力検定

ある特定の対立仮説$\theta_1 \in \Omega - \omega$に対して，
検定力を最大にする棄却域

↓

単純対立仮説θ_1に対する有意水準αの**最強力検定**

一様最強力検定

すべての対立仮説$\theta \in \Omega - \omega$に対して，
最強力検定がただ一通りに定まるとき，

↓

複合対立仮説H_1に対する**一様最強力検定**

ネイマン-ピアソンの定理

未知のパラメータθをもつ母集団分布を$f(x;\theta)$.
大きさnの標本$X_1, X_2, \cdots, X_n$の確率密度関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \cdots \times f(x_n; \theta)$$

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 & : \ \theta = \theta_0 \\ \text{対立仮説 } H_1 & : \ \theta = \theta_1 \end{cases}$$

最強力検定の棄却域

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ : \ \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1)}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_0)} \geq k \right\}$$

ここで，kは

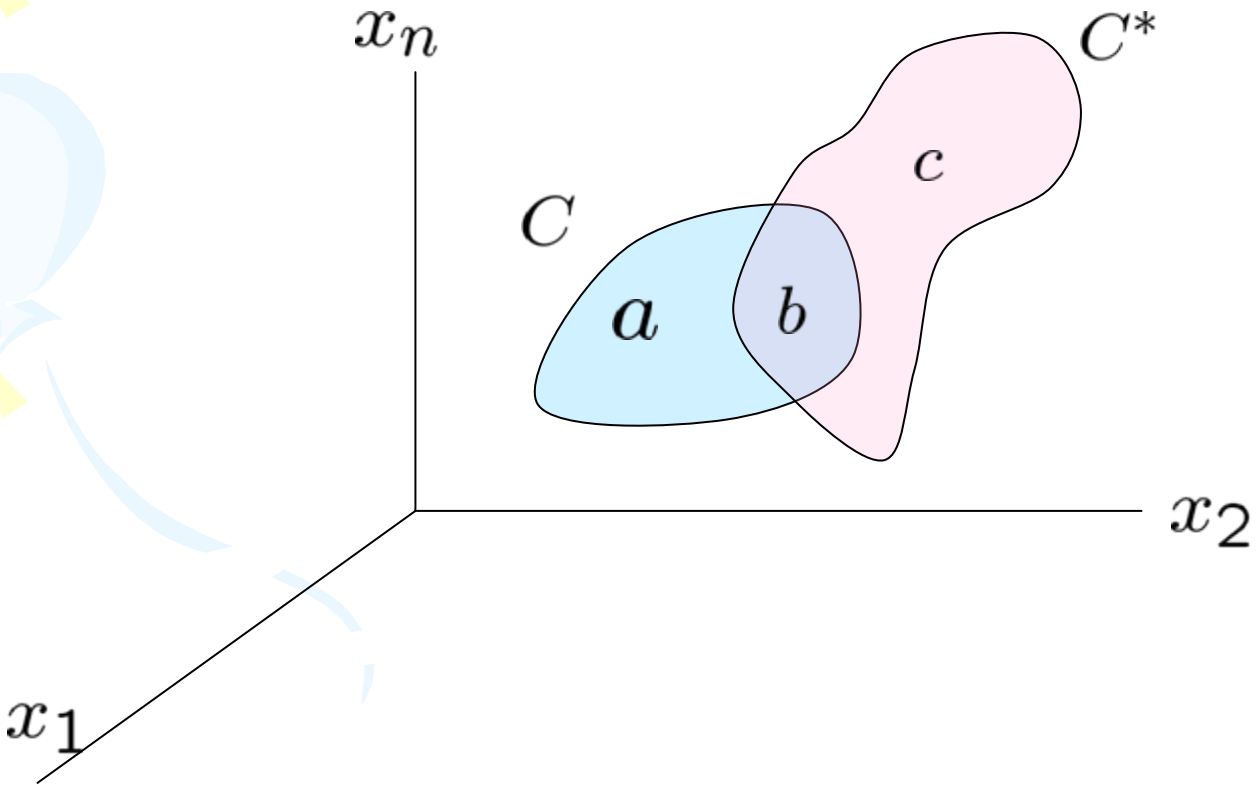
$$\int_C f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_0) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \alpha$$

となるように選んだものである．

$\int_C$は通常の積分記号をn個並べた重積分を表すものとする．

証明

大きさαの任意の棄却域をC^*とする.
領域CとC^*は下図のような閉曲面の
内部領域として表せる.



$L_0 = f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_0)$ とおく.

C と C^* はともに大きさ α の棄却域であるから

$$\int_C L_0 dx = \int_{C^*} L_0 dx$$

b は共通部分なので,

$$\int_a L_0 dx = \int_c L_0 dx$$

- C と C^* の両方に対する第２種の過誤の大きさを求める.

第２種の過誤の大きさ

H_1 が真のとき標本点が棄却域外に落ちる確率.

１から H_1 が真のとき標本点が棄却域内に落ちる確率をひいたもの.

$$B^*=1-\int_{C^*} L_1 dx,\ B=1-\int_C L_1 dx$$

$$B^*-B=\int_C L_1 dx-\int_{C^*} L_1 dx$$

bは共通部分なので,

$$B^*-B=\int_a L_1 dx-\int_c L_1 dx$$

$L_1 \geq kL_0$より,

$$\int_a L_1 dx \geq k\int_a L_0 dx$$

cはCの外側にあるので,

$$L_1 \leq kL_0$$

$$\int_c L_1 dx \leq k\int_c L_0 dx$$

$$B^*\text{-}B = \int_a L_1 dx - \int_c L_1 dx$$

$\int_a L_1 dx \geq k \int_a L_0 dx$, $\int_c L_1 dx \leq k \int_c L_0 dx$
より，

$$B^*\text{-}B \geq k \int_a L_0 dx - k \int_c L_0 dx$$

$$B^* \geq B$$

第２種の過誤の大きさを最小にすることが
最良を意味するとすれば，
この結果はCが大きさαの最良棄却域
であることを示す．

適用例

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を正規母集団 $N(\mu, \sigma_0^2)$ からの大きさ n の標本とする．σ_0^2 は既知.

$$\begin{cases} \text{帰無仮説 } H_0 & : \ \mu = \mu_0 \\ \text{対立仮説 } H_1 & : \ \mu > \mu_0 \end{cases}$$

ある特定の対立仮説 $\mu = \mu_1 \ (\mu_1 > \mu_0)$ 確率密度関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2\right\},$$

帰無仮説の確率密度関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}$$

$$\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu_1)}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu_0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\right\}}$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2 - \left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\right\}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\right\}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{\sum_{i=1}^n (x_i^2-2\mu_1 x_i+\mu_1^2) - \sum_{i=1}^n (x_i^2-\mu_0 x_i+\mu_0^2)\right\}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{-2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^n x_i + n(\mu_1^2-\mu_0^2)\right\}\right]$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{-2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i+n(\mu_1^2-\mu_0^2)\right\}\right]\geq k$$

とする.

$$-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{-2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i+n(\mu_1^2-\mu_0^2)\right\}\geq \log k$$

$$-\left\{-2(\mu_1-\mu_0)\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i+n(\mu_1^2-\mu_0^2)\right\}\geq 2\sigma_0^2 logk$$

$$2n(\mu_1-\mu_0)\bar{x}-n(\mu_1^2-\mu_0^2)\geq 2\sigma_0^2 logk$$

$$2n(\mu_1-\mu_0)\bar{x}\geq 2\sigma_0^2 logk+n(\mu_1^2-\mu_0^2)$$

$$\bar{x}\geq\frac{n(\mu_1^2-\mu_2^2)+2\sigma_0^2\log k}{2n(\mu_1-\mu_0)}=k_0$$

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq \frac{k_0-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_\alpha$$

$$C = \{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq \frac{k_0-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\} = z_\alpha \text{ とおく.}$$

$$\int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha$$

とすると,
有意水準αの最強力検定の棄却域は

$$C \ : \ \bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

$\mu_1 > \mu_0$を満たすすべての対立仮説μ_1について，この棄却域で与えられる最強力検定が1つに定まるので,
一様最強力検定となる.

6．7非劣性検定

ある病気に対する新薬の効果（薬効）について考える．

薬効の測り方

●病気が治ったか否かを問題にする場合
●その病気に対する主要な指標の数値がどれだけ改善されたかで測られる場合

今回は前者で考える．

病気が治った人数… 有効数, その割合… 有効率.

臨床試験により，新薬および対照薬の有効数，有効率が次の表のように与えられたとする．

表. 新薬と対照薬の有効数と有効率

薬	患者数	有効数	有効率
新薬	52	40	76. 9
対照薬	48	31	64. 6

母集団の真の有効率. 未知.

新薬を投与したときの有効率:p_A,
対照薬を投与したときの薬効の有効率:p_B

新薬および対照薬の患者数： n_1, n_2

この実験における有効率： $\hat{p}_A$, $\hat{p}_B$(p_A, p_B の推定値)

● 「新薬は対照薬に勝る」ことを主張しようとする●

$$H_0 : p_A = p_B \qquad H_1 : p_A > p_B$$

これは比率の差の検定であって，有意水準5% 棄却域は

$$Z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{s_e} > z(0.05) = 1.64$$

$$s_e = \sqrt{\frac{1}{n_1}\hat{p}_A(1-\hat{p}_A) + \frac{1}{n_2}\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)} = 0.09$$

検定統計量は

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{s_e} = \frac{0.769 - 0.646}{0.09} \\ &= 1.36 < z(0.05) = 1.64 \end{aligned}$$

新薬が対照薬に勝るとは言えない.

新薬の開発許可

有効性検定において有意に優れていなくても…

- 副作用が対照薬に比べて少ない.
- 単価が安い.

などの利点があれば、よい.

新薬は,対照薬の有効性とほぼ同等であることを主張する.

非劣性検定

医学的に意味のある量 $\Delta(>0)$ を定め，薬効において Δ 以上劣ることは無いことを保証する．

$$\bar{H}_0 : p_A \leq p_B - \Delta, \qquad \bar{H}_1 : p_A > p_B - \Delta$$

有意水準5％の非劣性検定の棄却域

$$\tilde{Z} = (\hat{p}_A - (\hat{p}_B - \Delta))/s_e > z(0.05) = 1.64$$

Δ の定め方に定説はないが，

標準誤差 s_e の50％とする場合が少なくない．

$$\Delta = 0.09 \times 0.50 = 0.045.$$

今回の実験結果の場合，

$$\tilde{Z} = (\hat{p}_A - (\hat{p}_B - \Delta))/s_e$$

$$=(0.769\text{-}(0.646\text{-}0.045))/0.09$$

$$=1.86 > z(0.05) = 1.64$$

非劣性が認められることになる．